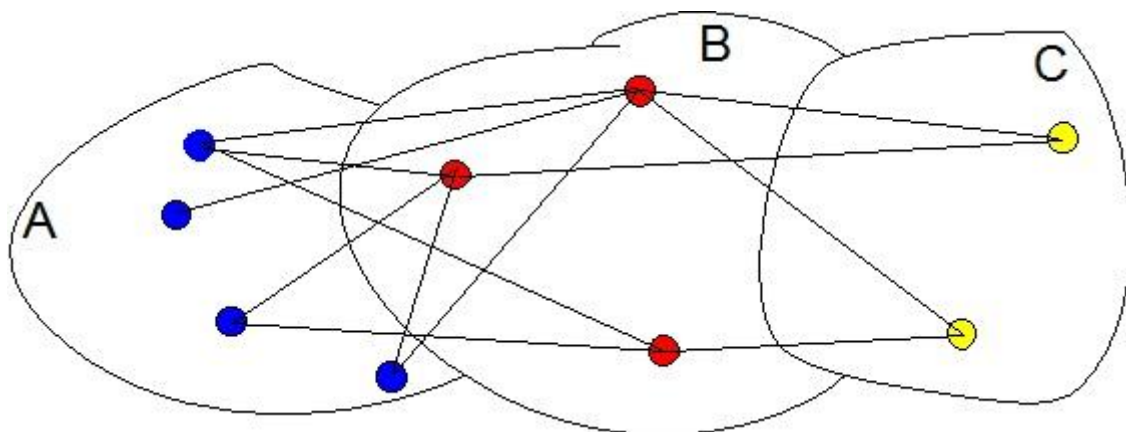
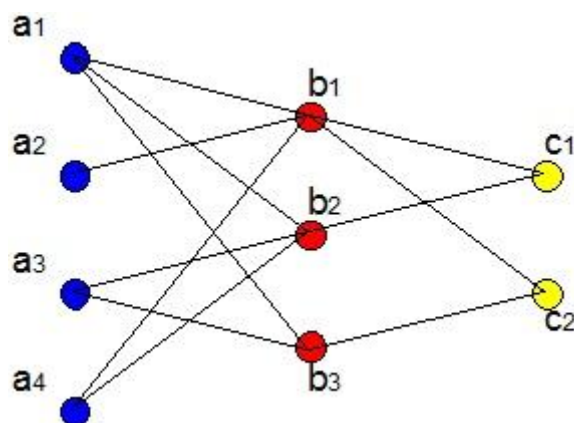


O násobení matic

Na obrázku jsou znázorněny letecké linky, které existují mezi letišti a_1, a_2, a_3, a_4 (modře vyznačenými) státu A, letišti b_1, b_2, b_3 (červeně označenými) státu B a letišti c_1, c_2 (žlutě označenými) státu C. Kolika způsoby se můžeme letecky dopravit ze státu A do státu C s mezipřistáním ve státě B?



Úlohu bychom jistě snadno podle obrázku vyřešili. Pokusme se ji však vyřešit početně takovým způsobem, který využívá tabulkové zápisy údajů. Nejprve si načrtneme uvažovaná spojení schematicky.



Počty spojení můžeme přehledně zapsat v tabulkách:

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	1	1
a_2	1	0	0
a_3	0	1	1
a_4	1	1	0

	c_1	c_2
b_1	1	1
b_2	1	0
b_3	0	1

	c_1	c_2
a_1	2	2
a_2	1	1
a_3	1	1
a_4	2	1

Pole tabulek můžeme zapsat schémata, která nazýváme **matice**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Připomeňme si **definici matice**.

Maticí rozumíme $m \cdot n$ čísel zapsaných ve schématu o m řádcích a n sloupcích. Jestliže prvky matice A jsou čísla a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), píšeme

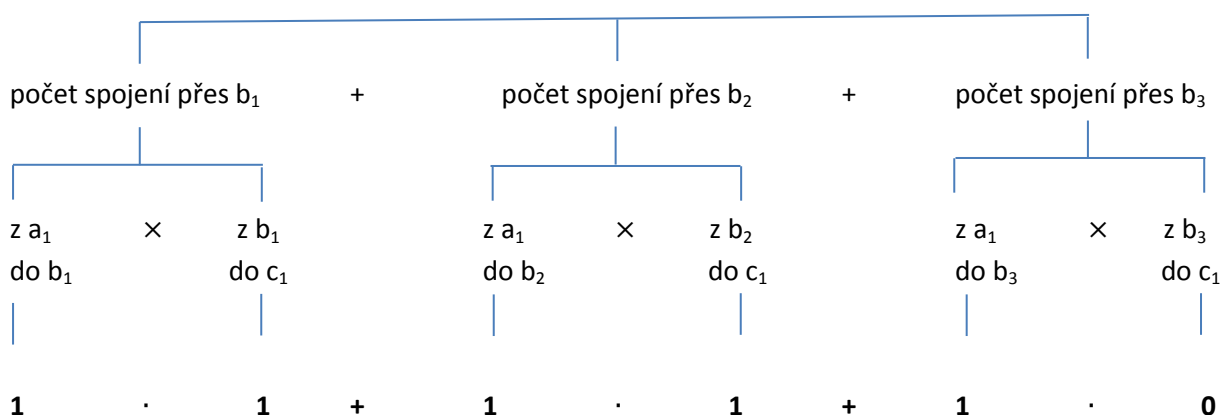
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nebo stručně $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$

Je-li $m = n$, říkáme, že matice A je čtvercová.

Vraťme se k naší úloze. Hledané řešení je zřejmě součtem prvků, matice C . Všimněme si však, jak spolu souvisí matice A, B, C . Zajímá-li nás počet spojení z a_1 do c_1 (tedy prvek v 1. ř. a v 1. sl. matice C), prozkoumáme postupně spojení z a_1 do b_1, b_2, b_3 . Tato spojení dále „nastavíme“ spojeními (pokud existují) z b_1, b_2, b_3 do c_1 . Počet hledaných spojení z a_1 do c_1 lze tedy zapsat takto:

Počet spojení z a_1 do c_1



Přesvědčte se, že i ostatní prvky matice C můžeme zapsat podobným způsobem.

$$C = \begin{pmatrix} 1.1 + 1.1 + 1.0 & 1.1 + 1.0 + 1.1 \\ 1.1 + 0.1 + 0.0 & 1.1 + 0.0 + 0.1 \\ 0.1 + 1.1 + 1.0 & 0.1 + 1.0 + 1.1 \\ 1.1 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix}$$

Matici C nazýváme součinem matic A a B . Zapisujeme: $A \cdot B = C$

Shrňme nyní předcházející úvahy do definice násobení matic.

Součinem matic $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ a $B = (b_{ij})_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, p}$ nazýváme matici $C = (c_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, p}$, jejíž prvky jsou $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Tento součet stručně zapisujeme:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Příklad 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

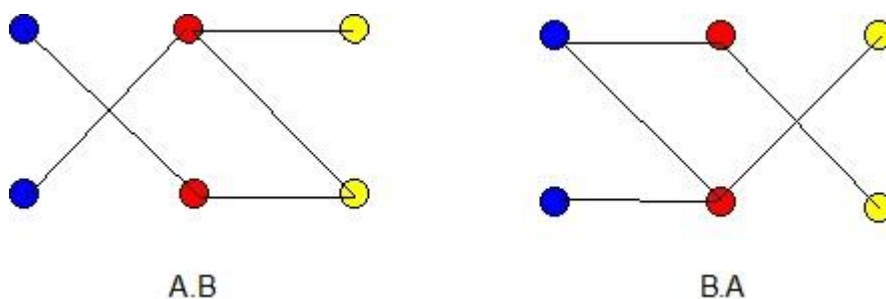
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vypočteme součin $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $B \cdot A \neq A \cdot B$. (Násobení matic obecně není komutativní operací.) Toto tvrzení můžeme snadno ilustrovat nám již známou spojovací interpretací.



Příklad 2: Součinem dvou nenulových matic může být matice nulová. (Nulovou maticí nazýváme matici, jejíž prvky jsou vesměs nuly.)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spojovací interpretace:

