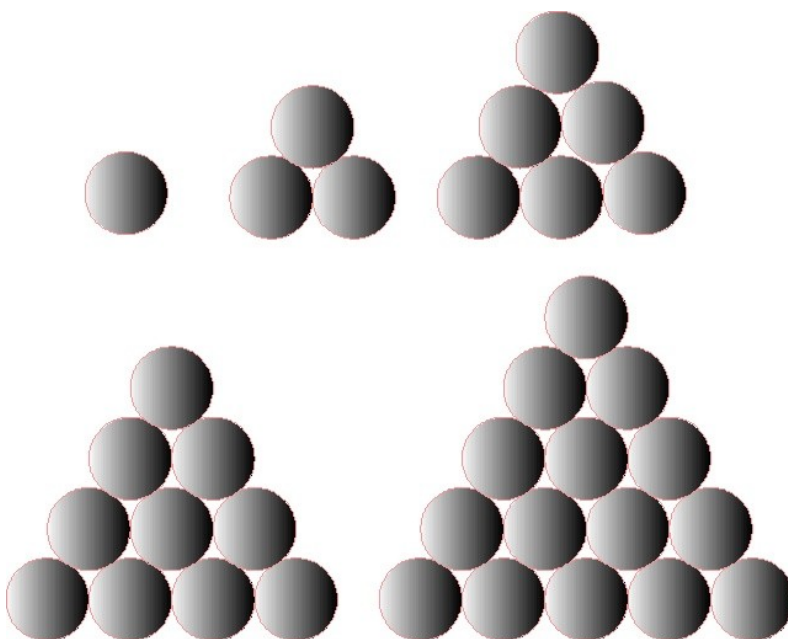


Trojúhelníková čísla

Mezi kombinačními čísly, byla zkoumána zejména ta čísla $\binom{n}{2}$, která se pro $n \geq 2$ nazývají **trojúhelníková čísla**. Název vychází z toho, že uvedené kombinační číslo udává počet shodných kružnic, které lze umístit v trojúhelníkovém schématu podle obrázku (zde postupně volíme $n = 1, 2, 3, 4, 5$)



Tabulka trojúhelníkových čísel pro několik hodnot n :

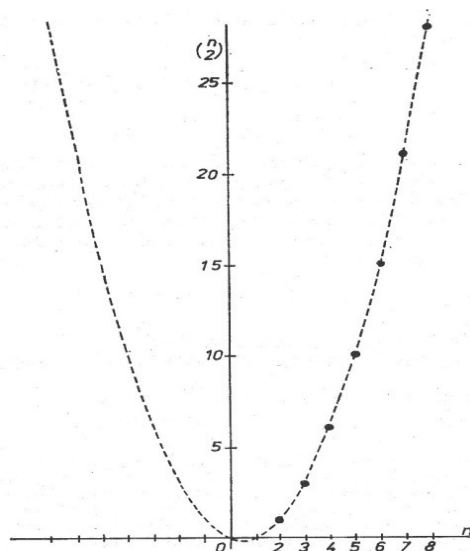
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{n}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45

Uspořádané dvojice $[2; 1], [3; 3], [4; 6], [5; 10], [6; 15], [7; 21], [8; 28], [9; 36], [10; 45], \dots$ můžeme znázornit v pravoúhlé soustavě souřadnic. Snadno zjistíme, že vyhovují funkčnímu předpisu

$$y = \frac{1}{2}x(x - 1).$$

Tento předpis (vzhledem k definici kombinačního čísla) popisuje vzájemnou souvislost čísla n a $\binom{n}{2}$.

Grafem uvedené funkce je parabola.



Příklad: Ukažte, že čísla 66, 666 jsou trojúhelníková; číslo 6666 ale trojúhelníkové není.

Řešení: V případě čísla 66 snadno ukážeme, že $\binom{12}{2} = 66$.

V případě čísla 666 hledáme přirozené číslo n , pro které $\binom{n}{2} = 666$. Po úpravě kombinačního čísla řešíme rovnici $n \cdot (n - 1) = 1332$. Tato rovnice má dva kořeny $n_1 = 37$ a $n_2 = -36$. Požadavkům úlohy vyhovuje pouze kořen n_1 .

V případě čísla 6666 řešíme rovnici $n \cdot (n - 1) = 13332$. Diskriminant této rovnice $D = 53329$. Pro žádné přirozené číslo p však neplatí, že $p^2 = 13332$. Číslo 6666 není tedy trojúhelníkové.

Příklad: Vyjádřete číslo 90 jako součin dvou trojúhelníkových čísel.

Řešení: Číslo 90 můžeme vyjádřit ve tvaru součinu $6 \cdot 15 = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2}$.

Příklad: Najděte aspoň jedno přirozené číslo, které lze vyjádřit aspoň dvěma různými způsoby jako součin několika trojúhelníkových čísel větších než jedna.

Řešení: $630 = 3 \cdot 10 \cdot 21 = \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} = 6 \cdot 105 = \binom{4}{2} \cdot \binom{15}{2}$

$2700 = 6 \cdot 10 \cdot 45 = \binom{3}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{2} = 3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 = \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2}$

Příklad: Rozhodněte, zda rovnice $\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \binom{z}{2}$ má konečně nebo nekonečně mnoho řešení v množině přirozených čísel.

Řešení: Rovnice má nekonečně mnoho řešení; pro libovolné přirozené číslo k platí:

$$\binom{3k+1}{2} + \binom{4k+2}{2} = \binom{5k+2}{2}$$

Výpočtem snadno ověříte, že $3k \cdot (3k + 1) + (4k + 1) \cdot (4k + 2) = (5k + 1) \cdot (5k + 2)$.