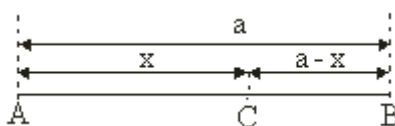


Co vlastně rozumíme slovy zlatý řez úsečky?



Rozdělíme-li úsečku AB délky a bodem C na dvě části x a $(a - x)$ tak, aby se poměr délek větší části x k menší části $(a - x)$ rovnal poměru délky úsečky a k větší části x , tedy aby platilo

$$\frac{x}{a - x} = \frac{a}{x}$$

pak říkáme, že jsme sestrojili zlatý řez úsečky AB a poměr $a:x$, resp. $x:(a - x)$, nazveme zlatým poměrem. Hodnotu můžeme snadno určit. Zvolme velikost úsečky $a = 1$ a dosaďme do rovnice zlatého řezu:

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{1}{x}$$

Po úpravě řešíme kvadratickou rovnici

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

jejíž kladný kořen je

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618\,03$$

a poměr

$$\varphi = \frac{1}{x_1} = 1,618\,03.$$

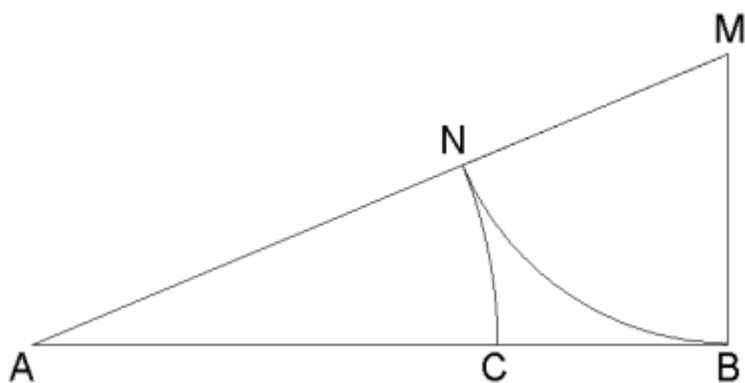
Záporný kořen nevyhovuje, neboť x je délka úsečky. Jeho převrácenou hodnotu $(-0,61803)$ použijeme k odvození zajímavých vlastností čísla φ

φ má další jedinečnou vlastnost: Je to jediné kladné číslo, které zmenšené o jedničku, dává svou převrácenou hodnotu: $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$.

Zlatý poměr můžeme vyjádřit dvěma způsoby: $\frac{a}{x} = 1,61803$ nebo $\frac{a}{x} = \frac{1}{0,61803}$.

Z nich plynou možnosti výpočtu nebo geometrické konstrukce zlatého řezu.

Geometricky můžeme zlatý řez sestavit různými způsoby podle toho, zda chceme úsečku AB rozdělit v poměru zlatého řezu nebo známe větší resp. menší díl úsečky AB a chceme určit úsečku AB. Na obrázku je znázorněna úsečka AB. Na kolmici v bodě B odměříme polovinu délky úsečky AB, sestojíme úsečku AM, okolo bodu M opíšeme kružnici o poloměru MB, okolo bodu A opíšeme kružnici o poloměru AN a pak je bod C bodem zlatého řezu úsečky AB. Tato konstrukce pochází od Heróna (1.st.př.n.l.).



Lze ji odvodit z vyjádření zlatého poměru, pro nějž platí

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

čili

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Kladný kořen

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

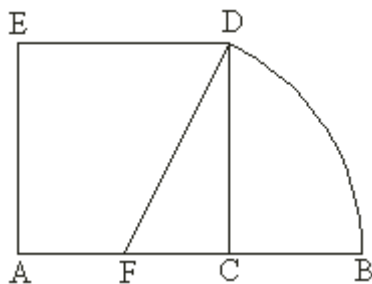
upravíme na tvar

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

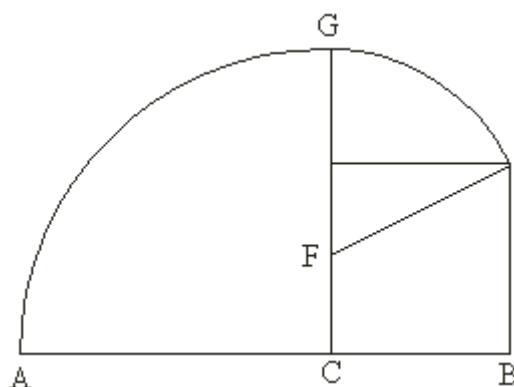
Výraz

$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

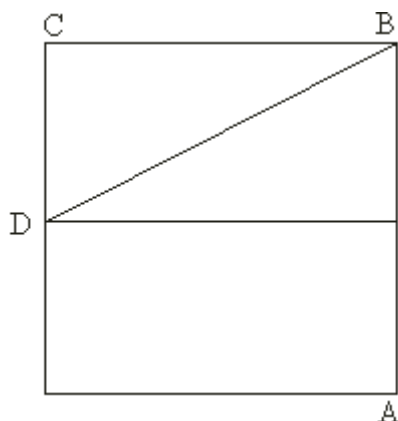
sestrojíme užitím Pythagorovy věty, což je uvedená euklidovská konstrukce. Úloha má vždy jediné řešení. Nyní uvedeme konstrukci celkové úsečky AB, pokud známe její větší díl AC. Nad úsečkou AC sestrojíme čtverec a opíšeme kružnici se středem F o poloměru FD. Průsečík polopřímky AC a kružnice je bod B.



Jestliže známe menší díl CB, úsečku AB získáme takto. Bod G určíme podobnou konstrukcí jako v předchozím případě, kde jsme hledali bod B. Pomocí kružnice o poloměru CG, zjistíme bod A.



Ze zkušenosti víme, že vhodným překládáním a skládáním papíru dostaneme různé hračky. Těchto papírových skládanek bylo využito k řešení některých planimetrických úloh, mezi nimi i rozdělení úsečky zlatým řezem. Papír tvaru čtverce přeložíme na půl a rozložíme.



Přehyb jdoucí vrcholem B a půlícím bodem D jedné strany má délku $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$.

Potom přehneme DC na přehyb BD, čímž získáme větší část úsečky rozdělené zlatým řezem o velikosti $\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$. Stranu BA přehneme na BD, kde ji bod C rozdělí na hledané části.

